

Лабораторная работа № 6

«МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В БИОЛОГИИ. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ РОСТ ЧИСЛЕННОСТИ В ПОПУЛЯЦИИ»

Одним из основных предположений, которое лежит в основе моделей роста численности, является предположение о пропорциональности скорости роста численности популяции (при этом не важно популяция лосей или популяция клеток бактерий). Данное предположение основано на том факте, что одним из свойств живых систем является их способность к увеличению собственной численности, т.е. – размножению.

Для многих бактерий, протистов или просто соматических клеток многоклеточных организмов, входящих в состав тканей организма (например, эпителиальной) – это просто митотическое деление, то есть удвоение числа клеток через определенный временной промежуток. Для сложно организованных многоклеточных растений и животных размножение происходит по более сложному закону, но в наиболее простых адекватных моделях, каковой является и модель экспоненциального роста предполагается, что скорость размножения популяции пропорциональна численности этой популяции.

Общая формула экспоненциального имеет вид:

$$N_t = N_0 e^{rt}$$

где N_t – численность популяции в момент времени t , N_0 – начальная численность популяции, r – скорость роста, t – время

Закон экспоненциального роста справедлив на определенной стадии развития популяции для клеток в ткани, одноклеточных водорослей, штаммов бактерий в культуре, многоклеточных животных в популяциях.

Рассмотрим построение модели экспоненциального роста на следующем примере.

Задание 1. Имеются данные по численности бактериальных клеток нового штамма *Bacillus nova* в 5 чашках Петри с начала посева и спустя 5 часов (таблица 1). Необходимо построив модель экспоненциального роста выяснить какой будет средняя численность клеток бактерий спустя 12 часов культивирования. Отобразите модель графически.

Таблица 1 – Численность клеток *B. nova* в начале культивирования и спустя 5 часов ($t=5$)

	ЧП 1	ЧП 2	ЧП 3	ЧП 4	ЧП 5
N_0	60	48	52	51	50
N_t	550	552	560	492	550

Решение:

Для начала необходимо рассчитать скорость роста для каждой из культур *B. nova* в каждой из чашек, а затем используя программу редактирования электронных таблиц (например, Microsoft Excel или в другой подобного плана редактор – бесплатный Libre Office Calc или Gnumeric) создать таблицу данных для 12 часов культивирования, внести туда полученные данные из модели, рассчитать среднее значение и его ошибку (таблица 2) и, в завершение, построить график модели, основываясь на данных из таблицы.

Таблица 2 – Прогнозные показатели численности *B. nova* согласно модели экспоненциального роста

ЧП	N ₀	N _{t(5)}	r	t	N _{t1}	N _{t2}	N _{t3}	N _{t4}	N _{t5}	M	±m
1	50	550		1							
2	48	552		2							
3	52	560		3							
4	51	492		4							
5	50	550		5							
				6							
				7							
				8							
				9							
				10							
				11							
				12							

В шапке таблицы используются следующие показатели: ЧП – номер чашки Петри; N₀ – начальный объем культуры бактерии; N_{t(5)} – объем культуры бактерий спустя 5 часов; N_{t1}–N_{t5} – рассчитанные объемы культуры бактерий согласно модели; M – среднее арифметическое из 5 чашек Петри за каждый час; ±m – ошибка средней арифметической.

В качестве примера используем две программы: коммерческий Microsoft Excel 2019 и бесплатный сопоставимый по возможностям Libre Office Calc 7.6.

Построение модели неограниченного роста популяции *Bacillus nova* при помощи Microsoft Excel 2019

Первое, что нужно сделать – сделать рабочий аналог таблицы 2 в рабочем листе Excel (рисунок 1). Для дальнейшего примера формул в ячейках будем использовать рабочую таблицу с адресами ячеек как на рисунке 1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Чашка	N0	Nt	r	t	Nt1	Nt2	Nt3	Nt4	Nt5	M	±m
2	1	50	550		1							
3	2	48	552		2							
4	3	52	560		3							
5	4	51	492		4							
6	5	50	550		5							
7					6							
8					7							
9					8							
10					9							
11					10							
12					11							
13					12							

Рисунок 1 – Рабочая таблица на листе MS Excel 2019

Далее необходимо рассчитать скорость роста популяции (r). Начать следует с первой чашки Петри. Для этого подставляем в формулу экспоненциального роста известные нам значения и решаем получившееся уравнение:

- 1) $550 = 50e^{r5}$;
- 2) $550/50 = 50e^{r5}/50$;
- 3) $11 = e^{r5}$;
- 4) $\ln(11) = \ln(e^{r5})$;
- 5) $\ln(11) = r5$;
- 6) $\ln(11)/5 = r$;
- 7) $r = 0,479579$.

Для учебных целей округлим полученную скорость роста до сотых значений (два знака после запятой) – 0,48 и вставим его в соответствующую ячейку таблицы. После чего аналогично рассчитываем показатели роста для каждой из чашек Петри с занесением полученных округленных до сотых результатов в таблицу.

После чего следует рассчитать показатели численности бактерий в первой чашке Петри с использованием формулы экспоненциального роста, подставив в нее уже имеющиеся данные. Начать необходимо с первой чашки Петри для первого часа деятельности штамма бактерии. Для этого необходимо поставить курсор в ячейку F2 и ввести в нее формулу следующего вида: $=B\$2*EXP((D\$2*E2))$. Напоминаем, что адресация ячеек в формуле выполнена с учетом той таблицы, которая в нашем примере! Так как в Ваших собственных исследованиях в зависимости от расположения

таблицы адреса ячеек могут меняться. При этом следует помнить, что знак \$ указывает на абсолютный адрес ячейки, т.е. тот, который не должен меняться.

В соответствующей ячейке (в нашем случае – F2) появится результат численности за первый час размножения бактерии (рисунок 2).

	A	B	C	D	E	F
1	Чашка	N0	Nt	r	t	Nt1
2	1	50	550	0,48	1	80,804
3	2	48	552	0,49	2	
4	3	52	560	0,48	3	
5	4	51	492	0,45	4	
6	5	50	550	0,48	5	
7					6	
8					7	
9					8	
10					9	
11					10	
12					11	
13					12	

Рисунок 2 – Рассчитанная численность бактерии *Bacillus nova* в первой чашке Петри за 1 час

Чтобы не вводить формулу еще 11 раз подведем курсор к правому нижнему углу ячейки F2 (он превратится в крестик) и протянем его до ячейки F13, которая соответствует двенадцатому часу жизни культуры бактерий. Сравните полученный результат с рисунком 3.

	A	B	C	D	E	F
1	Чашка	N0	Nt	r	t	Nt1
2	1	50	550	0,48	1	80,804
3	2	48	552	0,49	2	130,58
4	3	52	560	0,48	3	211,03
5	4	51	492	0,45	4	341,05
6	5	50	550	0,48	5	551,16
7					6	890,71
8					7	1439,5
9					8	2326,3
10					9	3759,4
11					10	6075,5
12					11	9818,5
13					12	15867

Рисунок 3 – Рассчитанная численность бактерии *Bacillus nova* в первой чашке Петри за 12 часов

Подобным способом рассчитываются данные и по остальным культурам (чашки Петри 2–4) и заполняются соответствующие ячейки таблицы.

Далее следует приступить к построению графика роста, используя средние значения всех пяти культур за каждый час роста с отображением на графике и стандартных ошибок средней арифметической. Первоначально необходимо рассчитать значения средней арифметической. Для этого нужно установить курсор в ячейке «М» для первого часа (К2), а затем ввести формулу расчета средней арифметической одним из способов:

1) Используя меню: «Формулы» → «Вставить функцию» → «Статистические» → «СРЗНАЧ» и нажать ОК (рисунок 4).

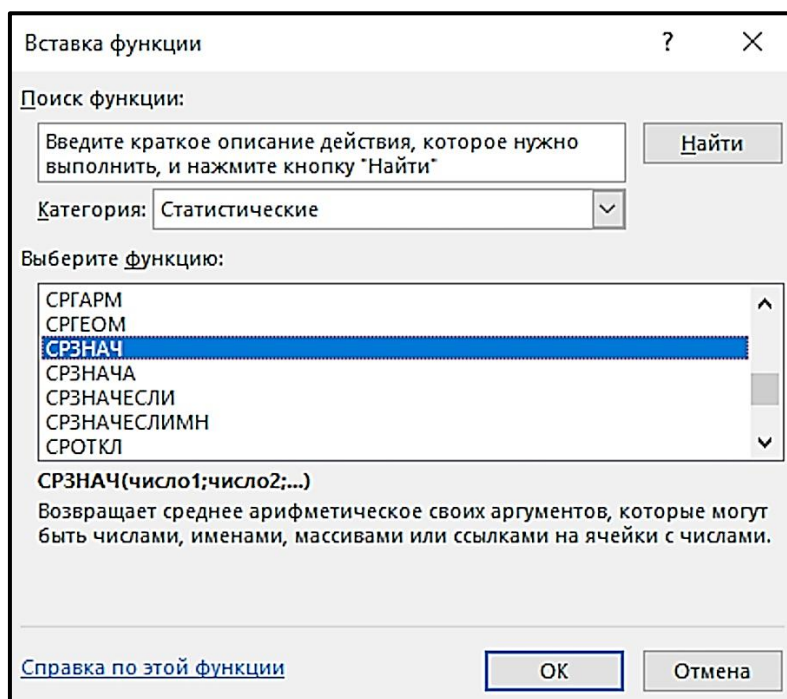


Рисунок 4 – Вставка функции «Средняя арифметическая»

В появившемся диалоговом окне установить курсор в ячейку «Число 1» и либо вручную указать необходимый диапазон ячеек (в нашем случае F2:J2), либо выделить его мышью и нажать ОК.

2) Вручную в ячейку К2 ввести формулу =СРЗНАЧ(F2:J2) и нажать клавишу Enter.

После этого скопировать формулу в остальные ячейки (в нашем случае К3–К13).

После расчета средней арифметической необходимо в столбце «±m» рассчитать значения стандартной ошибки для каждого среднего значения. Напоминаем, что формула стандартной ошибки имеет следующий вид:

$$\pm m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Здесь σ – это стандартное отклонение, а n – объем выборки (в нашем случае – 5).

Для расчета стандартной ошибки необходимо установить курсор в ячейку для первого часа в столбце « $\pm m$ » (в нашем случае – L2) и вписать формулу: =СТАНДОТКЛОН.В(F2:J2)/КОРЕНЬ(5) и нажать клавишу Enter после чего скопировать формулу для всех двенадцати часов (рисунок 5).

К	L
M	$\pm m$
80,796	0,9256
130,06	1,7267
209,41	3,6595
337,22	7,6488
543,13	15,357
874,92	29,752
1409,6	56,056
2271,5	103,37
3661	187,42
5901,3	335,31
9514	593,38
15341	1040,7

Рисунок 5 – Рассчитанные значения средней арифметической и стандартной ошибки

Теперь в таблице есть все данные для построения графика. Чтобы построить график необходимо выделить столбец с временем (t), которое будет отображено по оси абсцисс и столбец со средним значением (M), которое будет отображено по оси ординат. Затем перейти по пунктам меню «Вставка» → «Диаграммы» → «Все диаграммы» → «Точечная» и нажать ОК. Затем в поле появившейся диаграммы кликнуть правой клавишей мыши и выбрать опцию «Переместить диаграмму» (рисунок 6), в которой выбрать пункт «На отдельном листе», изменить название диаграммы на «Экспоненциальный рост» (рисунок 7) и нажать ОК.

После чего необходимо отредактировать наш график, предварительно убрав лишние надписи, добавив подписи на осях данных и увеличив точки значений (рисунок 8).

После этого необходимо добавить на график размах стандартных ошибок (т.н. «усы») и линию тренда (ее можно сделать красной, чтобы отличать от точек данных). Для добавления размахов стандартной ошибки следует кликнуть мышью по любой из точек данных и выделятся все, а Excel перейдет в закладку «Конструктор», где следует выбрать пункт меню «Добавить элемент диаграммы» → «Предел погрешностей» → «Стандартная погрешность» (рисунок 9).

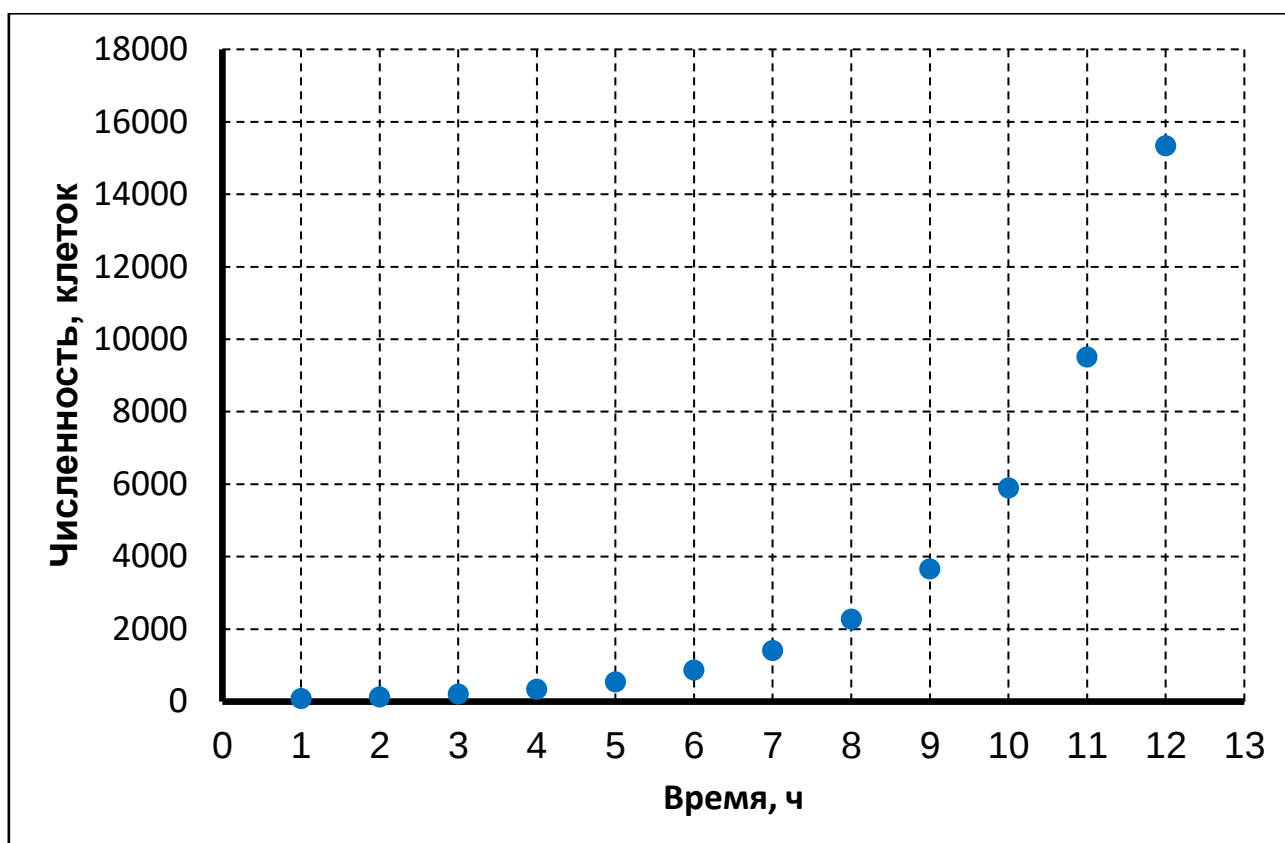


Рисунок 8 – Предварительный график роста численности бактерий

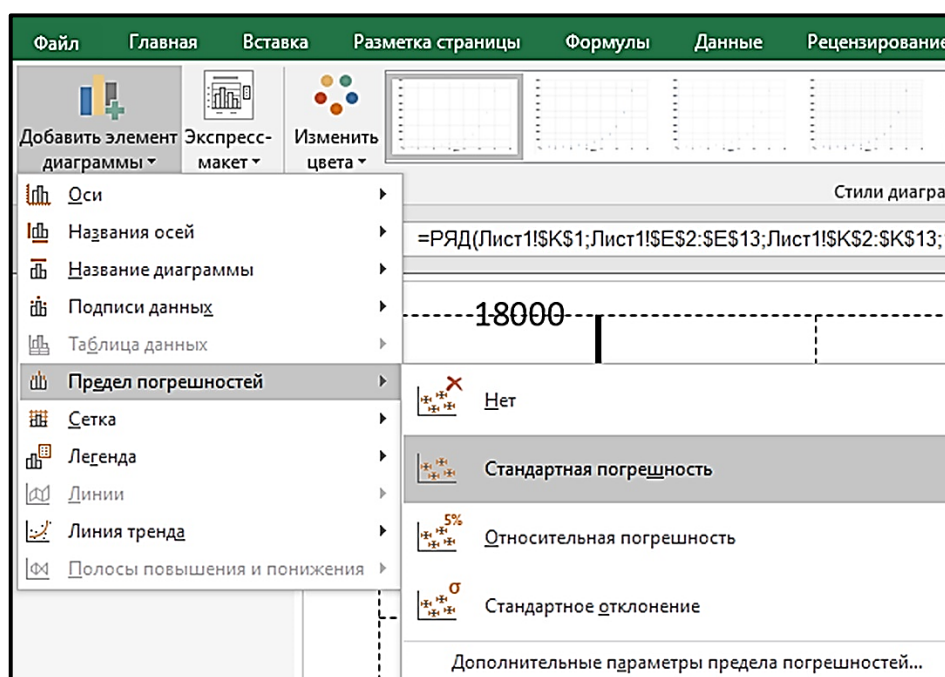


Рисунок 9 – Пункт меню «Стандартная погрешность»

На графике будут отражены как горизонтальные, так и вертикальные «усы» погрешностей, поэтому необходимо оставить для наших целей только вертикальные. Для этого необходимо щелкнуть правой клавишей

мыши по любой линии горизонтальной погрешности, убедиться, что выделились все из них и в появившемся контекстном меню выбрать пункт «Удалить» (рисунок 10).

Далее необходимо настроить вертикальные линии погрешностей и для этого указать диапазон рассчитанных стандартных ошибок средней арифметической из рабочей таблицы. Чтобы это сделать необходимо предварительно выделить все линии погрешностей на графике кликнув правой клавишей мыши по одной из них и зайти в диалоговую область «Формат предела погрешностей» для чего в контекстном меню выбрать опцию «Формат предела погрешностей» (рисунок 10).

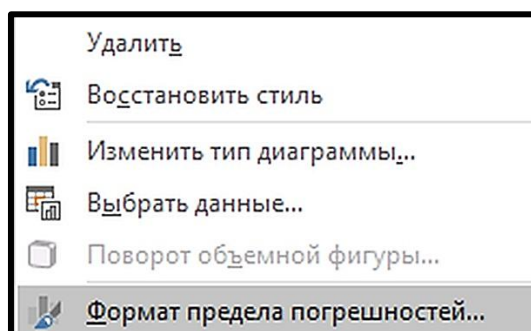


Рисунок 10 – Контекстное меню предела погрешностей

В диалоговой области необходимо перейти в третью закладку – «Вертикальный предел погрешностей» и в разделе «Величина погрешности» указать пункт «пользовательская» и нажать на кнопку «Укажите значение». В появившемся диалоговом окне «Настраиваемый предел погрешностей» нужно указать диапазон данных из рабочей таблицы (столбец « $\pm m$ ») как для положительного значения ошибки, так и для отрицательного (рисунок 11) и нажать кнопку ОК.

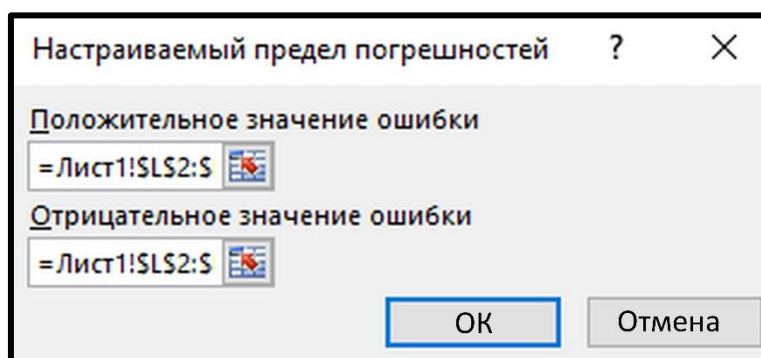


Рисунок 11 – Диалоговое окно «Настраиваемый предел погрешностей»

После чего в диалоговой области перейти на первую закладку – «Линия» и сделать линию погрешности в цвет точек значений и толщиной 1,75 пт (рисунок 12).

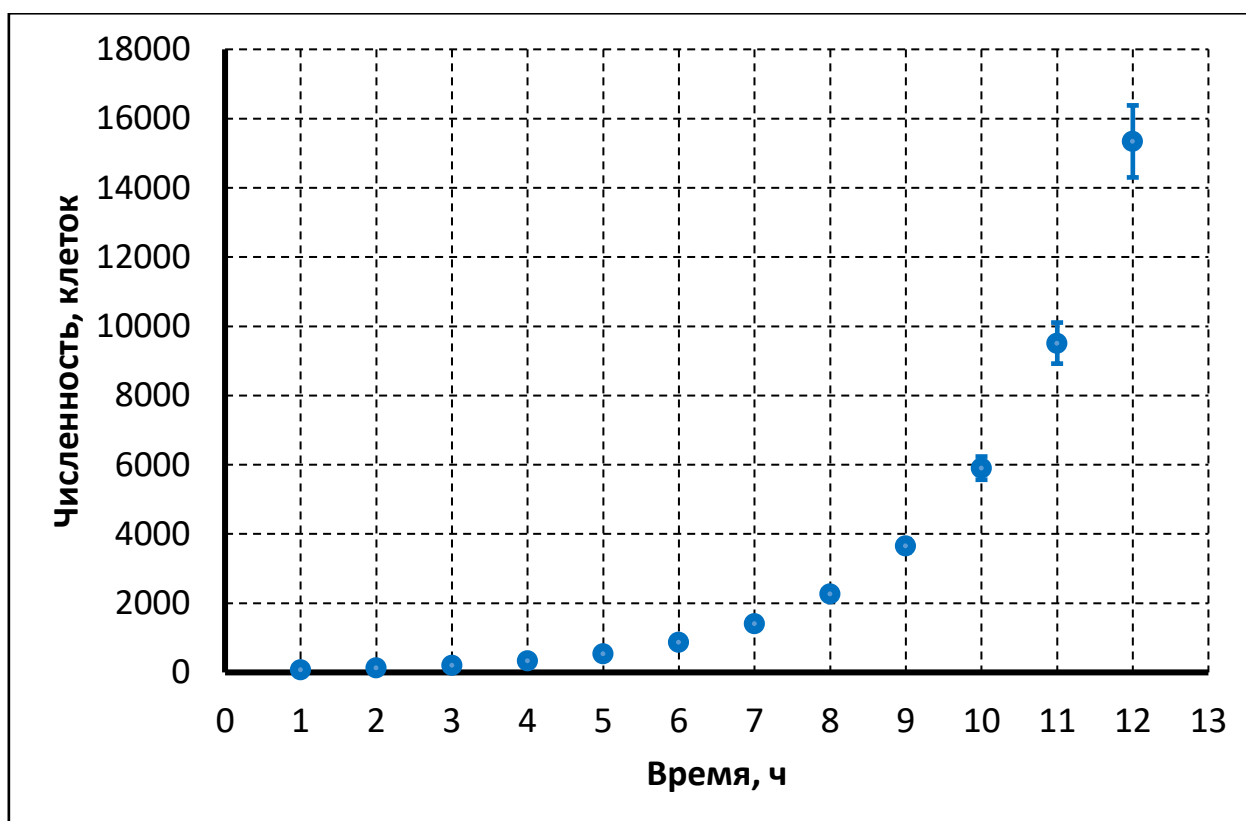


Рисунок 12 – График с вертикальными погрешностями значений

Далее необходимо добавить на график линии тренда и уравнение экспоненциального роста для данной культуры бактерий. Для этого необходимо предварительно выделить все точки данных на графике кликнув правой клавишей мыши по одной из них и в контекстном меню выбрать опцию «Добавить линию тренда...» (рисунок 12).

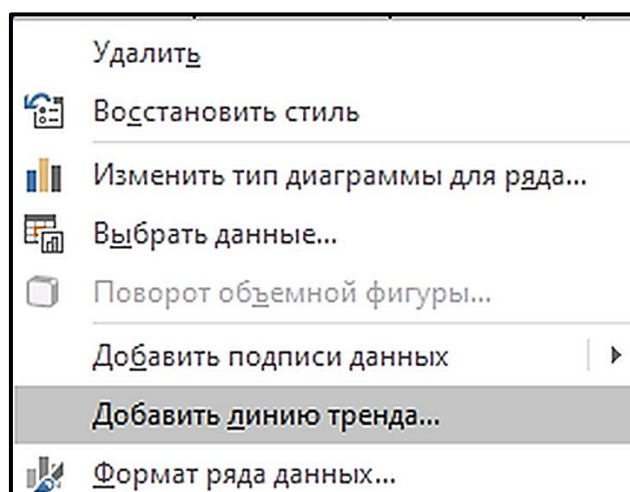


Рисунок 12 – Пункт контекстного меню «Добавить линию тренда»

После чего в появившейся диалоговой области «Формат линии тренда» в закладке «Параметры линии тренда» выбрать пункт «Экспоненциальная» и «Показывать уравнение на диаграмме». Затем в закладке «Линия» сделать

ее сплошной, красного цвета, толщиной 2,25 пт. После этого уравнение перетащить в левый верхний угол графика, сделать шрифтом «Arial» 16 пт полужирным курсивом. Готовый график экспоненциального роста культуры бактерий *B. nova* сравните с рисунком 13.

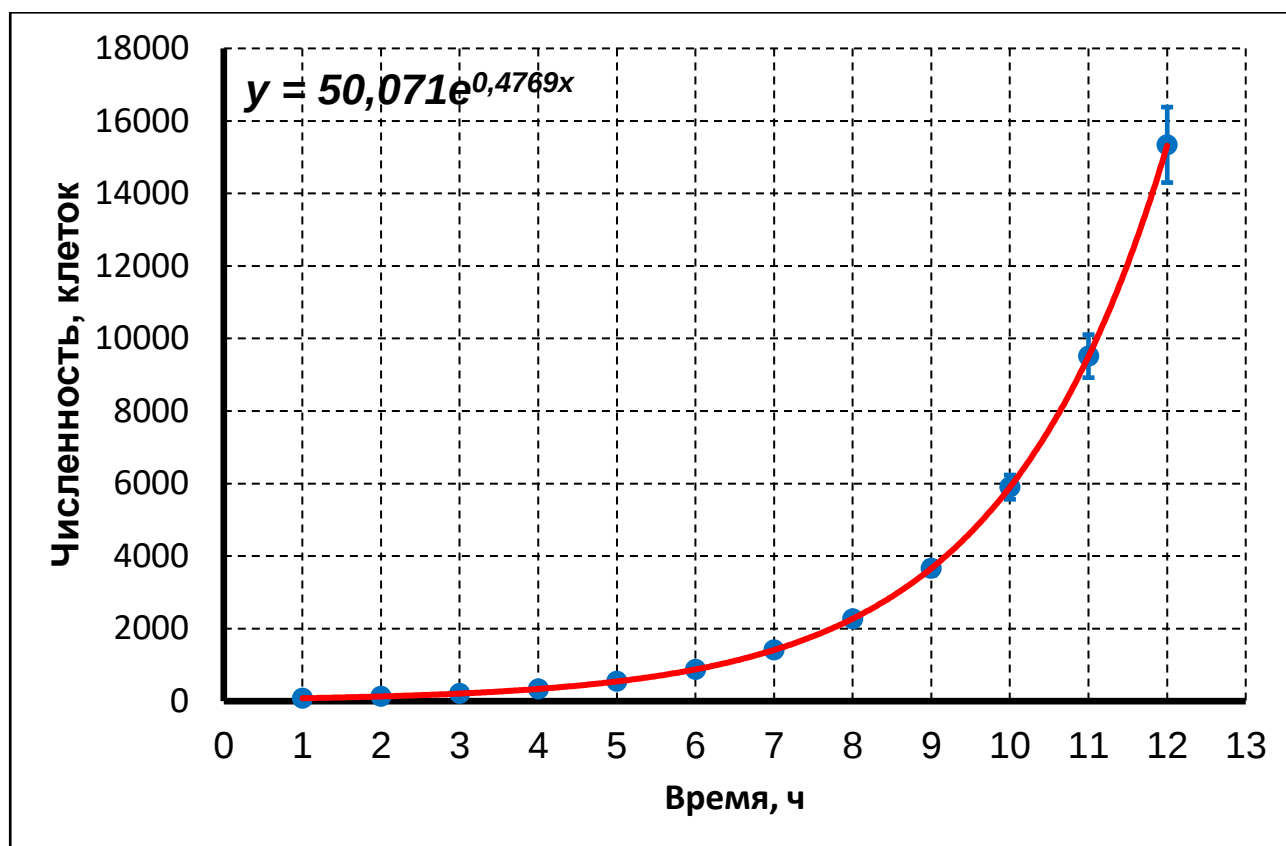


Рисунок 13 – График модели экспоненциального роста культуры бактерии *B. nova* в лаборатории, созданный в MS Excel 2019

Построение модели неограниченного роста популяции *Bacillus nova* при помощи Libre Office Calc 7.6

Создадим аналог ранее созданной электронной таблицы данных (таблица 1, рисунок 2) в рабочем листе Libre Office Calc 7.6 (рисунок 14). После этого необходимо повторить расчеты скорости роста (параметр «r») для каждой культуры бактерий из чашек Петри или скопировать из ранее созданной таблицы данных. Далее нужно произвести расчеты для первой чашки Петри (столбец «Nt1»). Для этого необходимо установить курсор в ячейку F2 и ввести формулу $=B\$2*EXP((\$D\$2*E2))$ и затем скопировать ее для всех показателей времени этой культуры (рисунок 15). Как можно заметить данная операция ничем не отличается от таковой в коммерческом продукте.

К ЛР5_3.ods — LibreOffice Calc

Файл Правка Вид Вставка Формат Стили Лист Данные Сервис Окно Справка

Arial 12 нт Ж К Ч А

D8 $f_x \Sigma =$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Чашка	N0	Nt	r	t	Nt1	Nt2	Nt3	Nt4	Nt5	M	$\pm m$
2	1	50	550		1							
3	2	48	552		2							
4	3	52	560		3							
5	4	51	492		4							
6	5	50	550		5							
7					6							
8					7							
9					8							
10					9							
11					10							
12					11							
13					12							

Рисунок 14 – Рабочая таблица на листе LO Calc 7.6

	A	B	C	D	E	F
1	Чашка	N0	Nt	r	t	Nt1
2	1	50	550	0.48		80.8037
3	2	48	552	0.49		130.585
4	3	52	560	0.48		211.035
5	4	51	492	0.45		341.048
6	5	50	550	0.48		551.159
7						890.714
8						1439.46
9						2326.27
10						3759.43
11						6075.52
12						9818.49
13						15867

Рисунок 15 – Рассчитанные значения численности культуры бактерии *B. nova* в первой чашке Петри

Аналогичным способом рассчитываем численность бактерий в остальных чашках Петри и заполняем таблицу. Далее нам необходимо рассчитать значения средней арифметической по всем чашкам Петри за каждый час и ее стандартные ошибки. Для этого устанавливаем курсор в ячейку K2 (столбец «M») и вводим необходимую формулу. Чтобы это сделать можно либо перейти в меню по пунктам «Вставка» → «Функция» (рисунок 16) либо нажать комбинацию клавиш «Ctrl+F2», после чего откроется диалоговое окно «Мастер функций» (рисунок 17).

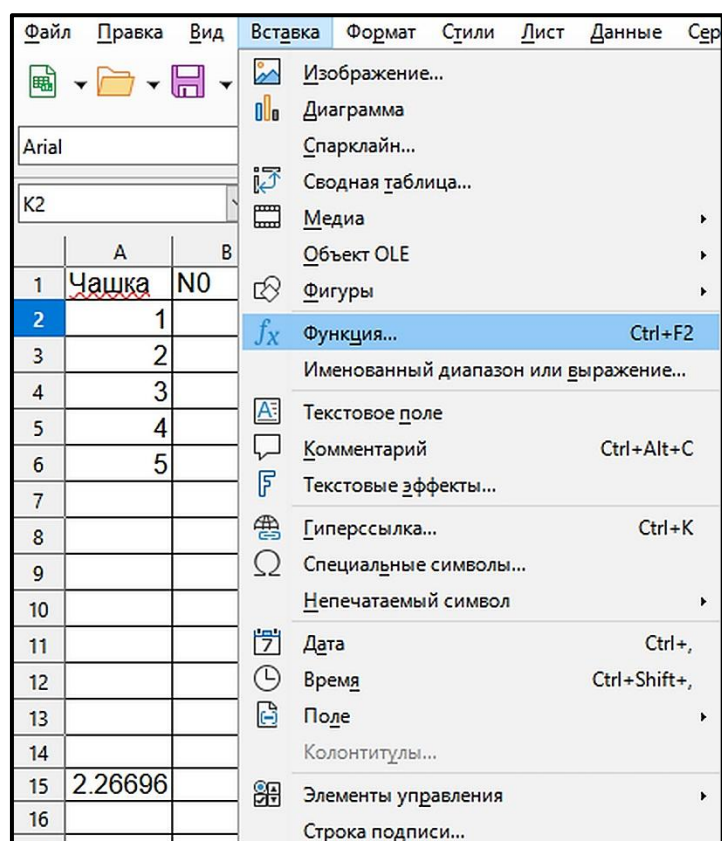


Рисунок 16 – Пункт меню «Функция» в LO Calc 7.6

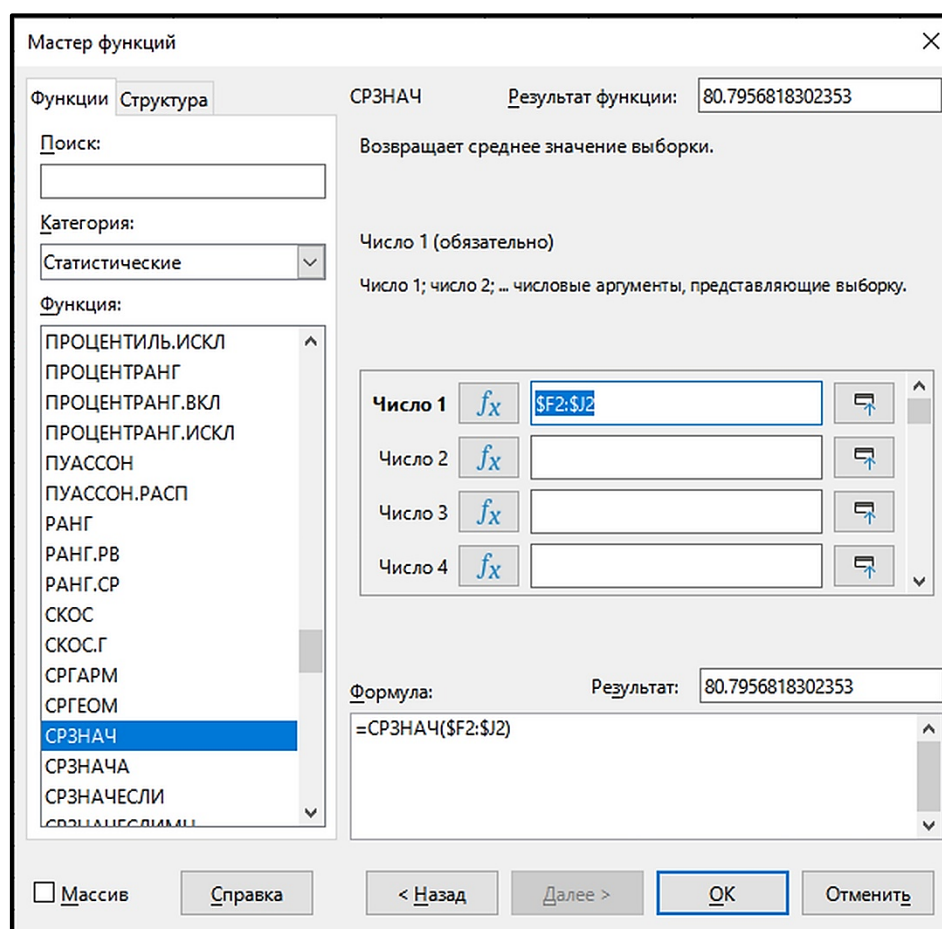


Рисунок 17 – Диалоговое окно «Мастер функций» в LO Calc 7.6

В этом диалоговом окне первоначально слева в закладке «Функции» в разделе «Категория» выбрать опцию «Статистические», а ниже, в разделе «Функция» выбрать саму функцию «СРЗНАЧ» и нажать кнопку «Далее». После чего в поле опции «Число 1» указать диапазон значений 1–5 чашек Петри для первого часа наблюдений и нажать ОК, а затем скопировать формулу в ячейки для остального времени культивирования бактерий. Далее необходимо рассчитать стандартную ошибку среднего значения и начать с ячейки L2, куда вручную (так как функция составная) вписываем формулу расчета $=\text{СТОТКЛ}(\$F2:\$J2)/\text{КОРЕНЬ}(5)$ и копируем ее для всех часов наблюдений. Рабочая таблица для составления графика модели готова.

Для того, чтобы построить график получившейся модели экспоненциального роста в LO Calc 7.6 необходимо сначала выделить данные двух столбцов: столбец с временем (t), которое будет отображено по оси абсцисс и столбец со средним значением (M), которое будет отображено по оси ординат. Затем перейти по пунктам меню «Вставка» → «Диаграмма» и в диалоговом окне «Мастер диаграмм» в списке диаграмм выбрать «XY (разброс)» и нажать кнопку «Готово» (рисунок 18).

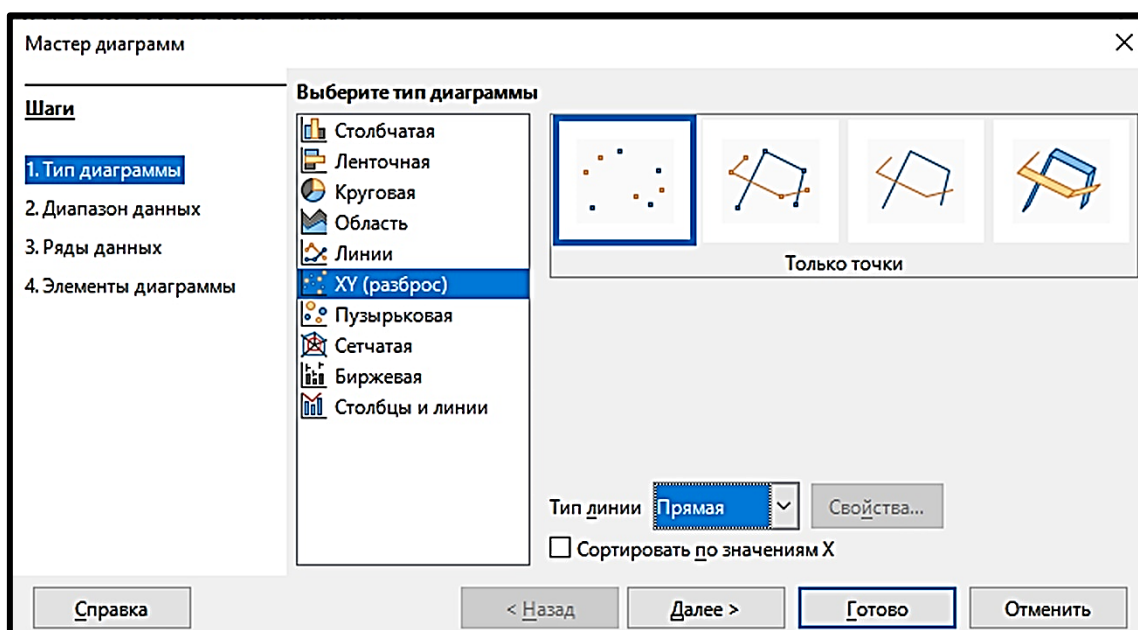


Рисунок 18 – Диалоговое окно «Мастер диаграмм» в LO Calc 7.6

Затем необходимо отредактировать получившийся график. Для этого необходимо дважды кликнуть по области графика, чтобы выделить ее, а затем кликнув правой клавишей мыши и используя контекстное меню удалить легенду, сделайте подписи осей, сделайте более жирными линии и шрифт Arial 14 пт (рисунок 19).

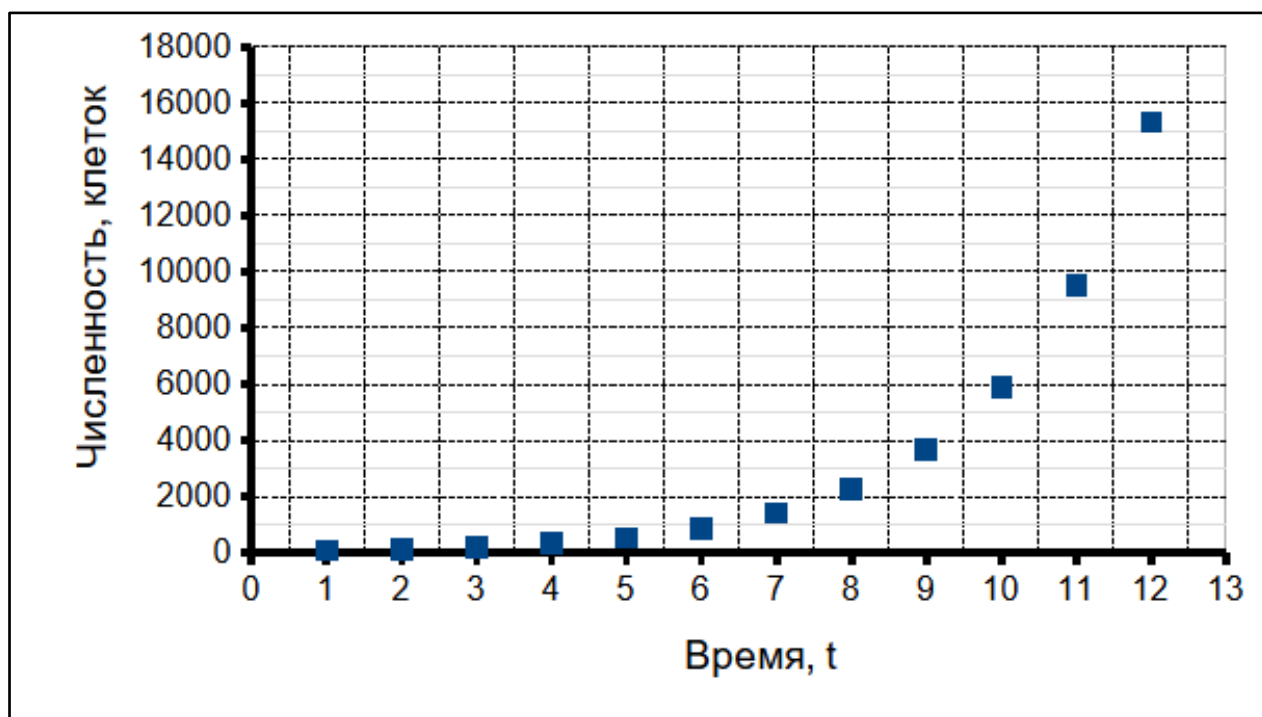


Рисунок 19 – Точечный график экспоненциального роста в LO Calc 7.6

Далее необходимо добавить погрешности на график. Для этого нужно дважды кликнуть на графике, активировав его, а затем кликнуть правой клавишей мыши по любой из точек и выбрать в контекстном меню опцию «Вставить полосы погрешностей Y» (рисунок 20).

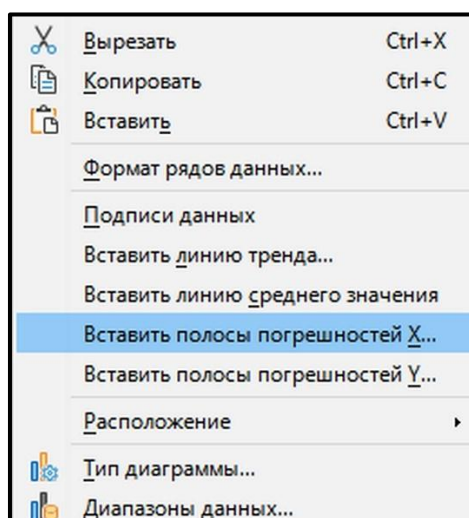


Рисунок 20 – Пункт «Вставить полосы погрешностей Y» контекстного меню точек данных

В дальнейшем в диалоговом окне «Полосы погрешностей Y» нужно настроить полосы погрешностей. Для этого в закладке «Полосы погрешностей» в разделе «Категория погрешностей» выбрать «Диапазон ячеек» и так

Полосы погрешностей Y для рядов данных «М»

Полосы погрешностей Y **Линии**

Категория погрешностей

☐ Постоянное значение
☐ Проценты
☐ Среднеквадратическое отклонение
☒ Диапазон ячеек

Индикатор погрешностей

☒ Положительные и отрицательные
☐ Положительные
☐ Отрицательные

Параметры

Подожит. (+) 
 Отрицат. (-) 
☒ Одинаковые значения

Справка Восстановить **OK** Отменить

Рисунок 21 – Диалоговое окно «Полосы погрешностей Y»

как у нас одинаковые значения стандартной ошибки выделить бокс «Одинаковые значения» после чего в боксе «Параметры» указать диапазон данных рассчитанной ранее стандартной ошибки из рабочей таблицы (рисунок 21). Затем в закладке диалогового окна «Линии» нужно отредактировать линию полосы погрешностей сделав ее толще и отметить цветом похожим на цвет точки данных и нажать ОК. Получившийся график с линиями стандартной ошибки сравните с рисунком 22.

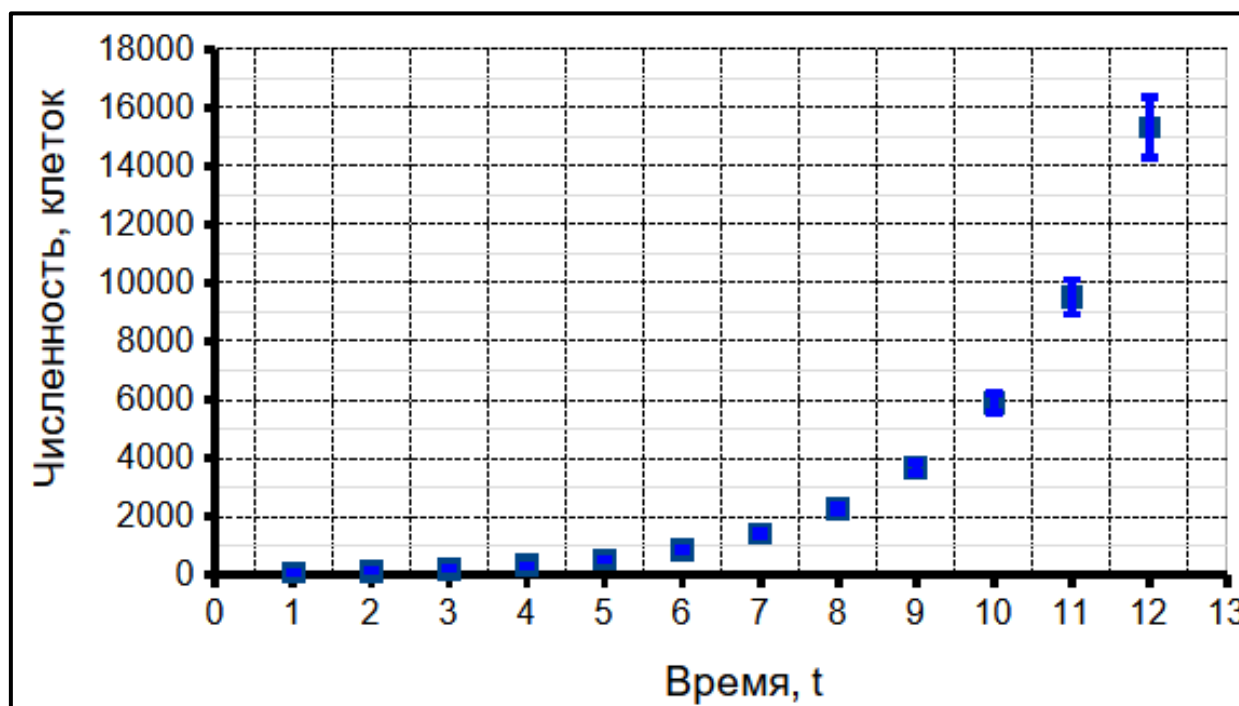


Рисунок 22 – График с отмеченными параметрами стандартной ошибки

Затем после выделения точек данных кликаем по ним правой клавишей мыши необходимо выбрать в контекстном меню опцию «Добавить линию тренда» и в диалоговом окне «Линия тренда» в закладке «Тип» выбрать тип регрессии – экспоненциальный и показать уравнение, а в закладке линии сделать ее красного цвета и слегка толще (рисунок 23) и нажать кнопку ОК.

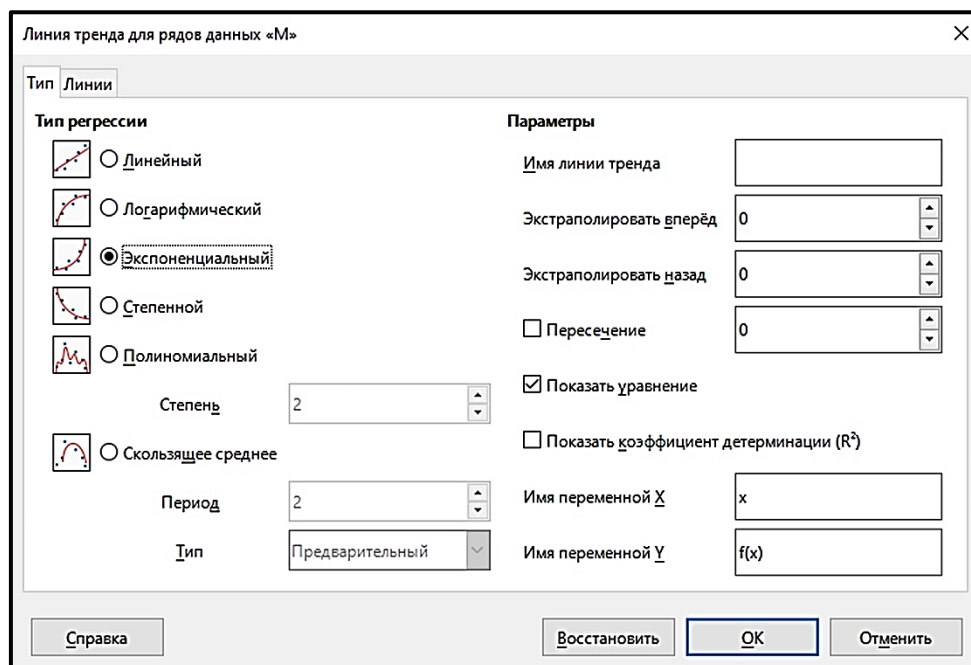


Рисунок 23 – Диалоговое окно «Линия тренда»

Окончательный график сравните с рисунком 24.

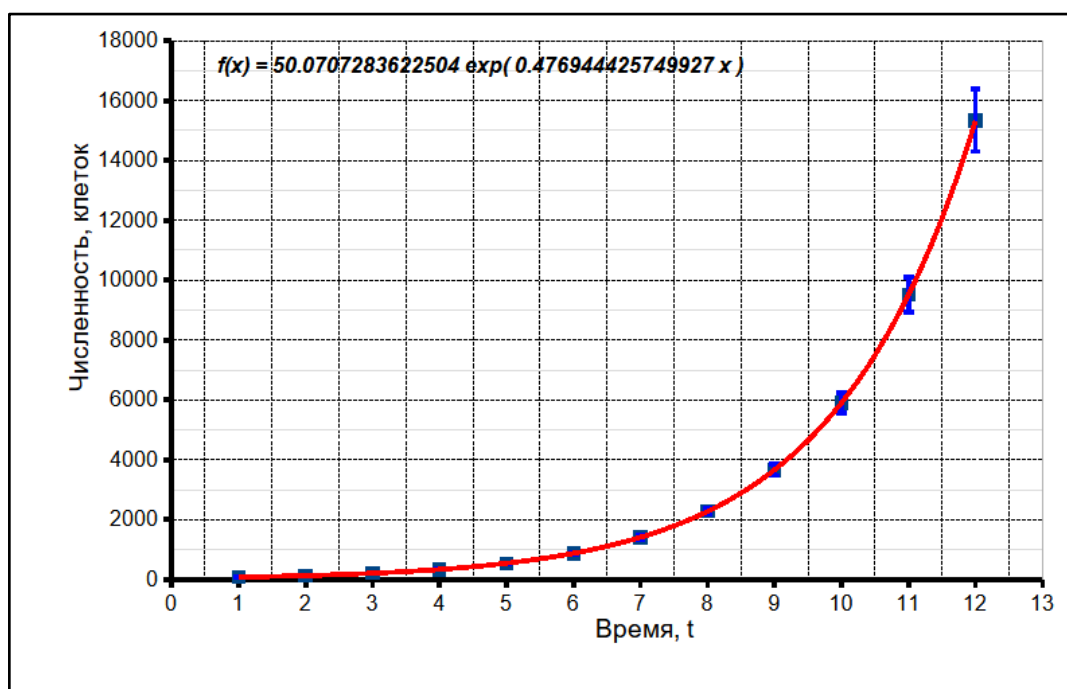


Рисунок 24 – График модели экспоненциального роста культуры бактерии *B. nova* в лаборатории, созданный в Libre Office Calc 7.6

Задания для самоконтроля

1) На острова архипелага Сан-Хуан (штат Вашингтон) в 1937 году были заселены фазаны. На остров Оркас – 2 самца и 6 самок, на остров Лопес – 3 самца и 6 самок, на остров Шо – 1 самец и 3 самки, на остров Сан-Хуан – 2 самца и 4 самки, на остров Ламми – 2 самца и 6 самок. К 1942 году на этих островах было выявлено следующее количество фазанов: о. Оркас – 1898, о. Лопес – 2010, о. Шо – 1799, о. Сан-Хуан – 1952, о. Ламми – 1421.

Создайте модель экспоненциального роста популяции фазанов на архипелаге Сан-Хуан и спрогнозируйте численность популяции к 1957 году, определите формулу модели, постройте график роста популяции.

2) Изучали динамику эвтрификации цианобактериями водоемов, которые были загрязнены органическими отходами с рядом расположенной свинофермы. Было исследовано 5 водоемов на протяжении 9 суток с посуточным (каждые 24 часа) учетом количества синезеленых водорослей в титрах. Спустя первые 24 часа количество клеток на мл титра были следующими:

Время, ч	Титр клеток цианобактерий, кл./мл				
	Пруд 1	Пруд 2	Пруд 3	Пруд 4	Пруд 5
0	135	171	60	252	106
24	245	270	113	371	201

Создайте модель экспоненциального роста синезеленых водорослей в загрязненных водоемах и спрогнозируйте рост эвтрофикации этих водоемов спустя 9 суток от начала наблюдений, определите формулу модели, постройте график роста популяции.

3) На острова архипелага Шпицберген в 1961 году были заселены северные олени (*Rangifer tarandus*). На остров Западный Шпицберген – 3 самца и 8 самок, на остров Северо-Восточная Земля – 2 самца и 5 самок, на остров Эдж – 1 самец и 3 самки. Спустя 20 лет популяции оленей насчитывали следующее количество особей: о. Западный Шпицберген – 52 особи, о. Северо-Восточная Земля – 43 особи, о. Эдж – 38 особей.

Создайте модели экспоненциального роста популяции северных оленей на каждом из перечисленных островов архипелага Шпицберген и спрогнозируйте численность этих популяций популяции к 2000 году, определите формулу модели, постройте графики роста популяций, объединив их на одной диаграмме.